Matrices de décomposition des algèbres de Hecke cyclotomiques de type $G(r, p, n)$

N. Jacon (avec Gwenaëlle Genet)

Université de Franche-Comté

Octobre 2006

1- Algèbres de Hecke cyclotomiques.

Soit k un sous-corps de $\mathbb{C}$ et V un k e.v de dimension finie. On dit qu'un élément $s \in \mathrm{GL}(V)$ est une reflexion (complexe) si $Id_V - s$ est de rang 1 et si s est d'ordre fini.

Un groupe de réflexion complexe est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ engendré par des reflexion complexes.

Tout groupe de reflexion complexe s'écrit comme produit direct de groupes de réflexions complexes W irréductibles (ie tel que V est une représentation irréductible de W).

Soient r, p, $n > 2$ des entiers positifs tels que p divise r. On pose $d = r/p$.

Sheppard et Todd ont établi une classification des groupes de réflexions complexes (irréductibles). Dans cette classification, on trouve :

- une famille de groupes notée $G(r, p, n)$.
- 34 autres groupes de réflexions "exceptionnels".

Soient r, p, $n > 2$ des entiers positifs tels que p divise r. On pose $d = r/p$.

Sheppard et Todd ont établi une classification des groupes de réflexions complexes (irréductibles). Dans cette classification, on trouve :

- une famille de groupes notée $G(r, p, n)$.
- 34 autres groupes de réflexions "exceptionnels".

Le groupe $G(r, p, n)$ est le groupe des matrices de permutation $n \times n$ telles que :

1. il y a exactement un coefficient non nul dans chaque ligne et chaque colonne,
2. les coefficients sont soit 0 soit des racines $r^{\text{ième}}$ de l'unité,
3. la $d^{\text{ième}}$ puissance du produit des coefficients non nuls est 1.

Soit R un anneau intègre et u_1,...,u_r, q des éléments inversibles dans R.

L'algèbre de Hecke cyclotomique de type $G(r,1,n)$ (ou algèbre de Ariki-Koike) est la R-algèbre avec présentation par :

- génerateurs : T_1, ..., T_n;

Soit R un anneau intègre et $u_1,\ldots,u_r$, q des éléments inversibles dans R.

L'algèbre de Hecke cyclotomique de type $G(r,1,n)$ (ou algèbre de Ariki-Koike) est la R-algèbre avec présentation par :

- génerateurs : T_1, ..., T_n;
- relations :

$$T_1T_2T_1T_2 = T_2T_1T_2T_1,$$
$$T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}\ (i=2,\ldots,n-1),$$
$$T_iT_j = T_jT_i\ (|j-i|>1),$$
$$(T_1-u_1)(T_1-u_2)\ldots(T_1-u_r)=0,$$
$$(T_i-q)(T_i+1)=0\ (i=2,\ldots,n).$$

Soit R un anneau intègre et u_1,...,u_r, q des éléments inversibles dans R.

L'algèbre de Hecke cyclotomique de type $G(r,1,n)$ (ou algèbre de Ariki-Koike) est la R-algèbre avec présentation par :

- génerateurs : T_1, ..., T_n;
- relations :

$$\begin{aligned}
&T_1 T_2 T_1 T_2 = T_2 T_1 T_2 T_1,\\
&T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}\ (i = 2, ..., n-1),\\
&T_i T_j = T_j T_i\ (|j-i| > 1),\\
&(T_1 - u_1)(T_1 - u_2)...(T_1 - u_r) = 0,\\
&(T_i - q)(T_i + 1) = 0\ (i = 2, ..., n).
\end{aligned}$$

C'est une déformation de l'algèbre du groupe de réflexion $G(r,1,n)$.

Soient comme tt à l'heure r, p, $n > 2$ des entiers positifs tels que p divise r et $d := r/p$, R un anneau intègre et $x_0,\ldots,x_{d-1}$, q des éléments inversibles de R. Soit η_p une racine primitive $p$ième de l'unité dans R.
Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, si $j - 1 = lp + k$ $(0 \leqslant k \leqslant p - 1,\ 0 \leqslant l \leqslant d - 1)$ on pose :

$$u_j = \eta_p^k x_l.$$

Soient comme tt à l'heure r, p, $n > 2$ des entiers positifs tels que p divise r et $d := r/p$, R un anneau intègre et $x_0, \ldots, x_{d-1}$, q des éléments inversibles de R. Soit η_p une racine primitive $p$ième de l'unité dans R.

Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, si $j - 1 = lp + k$ $(0 \leqslant k \leqslant p-1,\ 0 \leqslant l \leqslant d-1)$ on pose :

$$u_j = \eta_p^k x_l.$$

Alors l'algèbre de Hecke cyclotomique $H_{r,p,n}^{\mathbf{x},q}$ *de type* $G(r,p,n)$ est la R-sous algèbre de $H_{r,1,n}^{\mathbf{u},q}$ engendrée par

$$a_0 = T_1^p \qquad a_1 = T_1 T_2 T_1^{-1} \qquad a_i = T_i (2 \leqslant i \leqslant n).$$

- si $r = p = 1$, c'est l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} (ie associée au groupe symétrique),
- si $r = 2$, $p = 1$ c'est l'algèbre de Hecke type B_n (ie associée au groupe hyperoctohédral),

- si $r = p = 1$, c'est l'algèbre de Hecke de type A_{n-1} (ie associée au groupe symétrique),
- si $r = 2$, $p = 1$ c'est l'algèbre de Hecke type B_n (ie associée au groupe hyperoctohédral),

On a

$$H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} T_1^i H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}.$$

et on peut définir deux automorphismes :

- de $H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}$: pour $h \in H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}$, on définit

$$g(h) = T_1^{-1} h T_1.$$

- de $H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n}$: pour $h \in H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}$, $0 \leqslant j \leqslant p-1$, on définit

$$f(T_1^j h) = \eta_p^j T_1^j h.$$

2-Théorie des représentations

A partir de maintenant x_0, ..., x_{d-1}, q sont des indéterminées. On pose :

- $A := \mathbb{C}[x_0^{\pm 1}, ..., x_{d-1}^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$,
- $K = \mathbb{C}(x_0, ..., x_{d-1}, q)$,
- $\theta : A \to \mathbb{C}$ une spécialisation.

2-Théorie des représentations

A partir de maintenant x_0, ..., x_{d-1}, q sont des indéterminées. On pose :

- $A := \mathbb{C}[x_0^{\pm 1}, ..., x_{d-1}^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$,
- $K = \mathbb{C}(x_0, ..., x_{d-1}, q)$,
- $\theta : A \to \mathbb{C}$ une spécialisation.

On a alors :

- deux algèbres semi-simples $H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K)$ et $H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n}(K)$,

2-Théorie des représentations

A partir de maintenant x_0, ..., x_{d-1}, q sont des indéterminées. On pose :

- $A := \mathbb{C}[x_0^{\pm 1}, \ldots, x_{d-1}^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$,
- $K = \mathbb{C}(x_0, \ldots, x_{d-1}, q)$,
- $\theta : A \to \mathbb{C}$ une spécialisation.

On a alors :

- deux algèbres semi-simples $H_{r,p,n}^{\mathbf{x},q}(K)$ et $H_{r,1,n}^{\mathbf{u},q}(K)$,
- deux algèbres éventuellement non semi-simples : $H_{r,p,n}^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}(\mathbb{C})$ et $H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})$.

Problème : Trouver une classification de

$$\mathrm{Irr}\left(H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K)\right) \text{ et } \mathrm{Irr}\left(H^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}_{r,p,n}(\mathbb{C})\right)$$

en utilisant les classifications (connues) de

$$\mathrm{Irr}\left(H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n}(K)\right) \text{ et } \mathrm{Irr}\left(H^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}_{r,1,n}(\mathbb{C})\right).$$

Problème : Trouver une classification de

$$\operatorname{Irr}\left(H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K)\right) \text{ et } \operatorname{Irr}\left(H^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}_{r,p,n}(\mathbb{C})\right)$$

en utilisant les classifications (connues) de

$$\operatorname{Irr}\left(H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n}(K)\right) \text{ et } \operatorname{Irr}\left(H^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}_{r,1,n}(\mathbb{C})\right).$$

On va appliquer la théorie de Clifford. On note maintenant

- $H^{r,p,n}$ au lieu de $H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K)$ (ou $H^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}_{r,p,n}(\mathbb{C})$).
- $H^{r,1,n}$ au lieu de $H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n}(K)$ (ou $H^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}_{r,1,n}(\mathbb{C})$).

Ainsi $H^{r,p,n}$ est une sous-algèbre de $H^{r,1,n}$.

- Soit $V \in \mathrm{Irr}\,(H^{r,1,n})$ et soit $U \in \mathrm{Irr}\,(H^{r,p,n})$ un sous-module simple de $\mathrm{Res}(V)$. Alors :

$$\mathrm{Res}(V) \simeq \bigoplus_{i=0}^{o_{g,U}-1} {}^{g^i}U.$$

- Soit $V \in \operatorname{Irr}(H^{r,1,n})$ et soit $U \in \operatorname{Irr}(H^{r,p,n})$ un sous-module simple de $\mathrm{Res}(V)$. Alors :

$$\mathrm{Res}(V) \simeq \bigoplus_{i=0}^{o_{g,U}-1} {}^{g^i}U.$$

- Soient $V, V' \in \operatorname{Irr}(H^{r,1,n})$, alors :

$$\mathrm{Res}(V) = \mathrm{Res}(V') \Leftrightarrow V' = {}^{f^i}V \text{ pour } 0 \leqslant i < o_{f,V}$$

- Soit $V \in \mathrm{Irr}\,(H^{r,1,n})$ et soit $U \in \mathrm{Irr}\,(H^{r,p,n})$ un sous-module simple de $\mathrm{Res}(V)$. Alors :

$$\mathrm{Res}(V) \simeq \bigoplus_{i=0}^{o_{g,U}-1} {}^{g^i}U.$$

- Soient $V, V' \in \mathrm{Irr}\,(H^{r,1,n})$, alors :

$$\mathrm{Res}(V) = \mathrm{Res}(V') \Leftrightarrow V' = {}^{f^i}V \text{ pour } 0 \leqslant i < o_{f,V}$$

- Tous les $H^{r,p,n}$-modules simples apparaissent dans la restriction d'un $H^{r,1,n}$-module simple.

- Soit $V \in \mathrm{Irr}\left(H^{r,1,n}\right)$ et soit $U \in \mathrm{Irr}\left(H^{r,p,n}\right)$ un sous-module simple de $\mathrm{Res}(V)$. Alors :

$$\mathrm{Res}(V) \simeq \bigoplus_{i=0}^{o_{g,U}-1} {}^{g^i}U.$$

- Soient $V, V' \in \mathrm{Irr}\left(H^{r,1,n}\right)$, alors :

$$\mathrm{Res}(V) = \mathrm{Res}(V') \Leftrightarrow V' = {}^{f^i}V \text{ pour } 0 \leqslant i < o_{f,V}$$

- Tous les $H^{r,p,n}$-modules simples apparaissent dans la restriction d'un $H^{r,1,n}$-module simple.

Ici :

$$o_{f,V} = \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid {}^{f^k}V \simeq V\},$$
$$o_{g,U} = \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid {}^{g^k}U \simeq U\}.$$

Le cas semi-simple

Soit Π_n^r l'ensemble des r-multipartitions de rang n

Le cas semi-simple

Soit Π_n^r l'ensemble des r-multipartitions de rang n :

Théorème (Ariki, Dipper-James-Mathas)

Pour tout $\underline{\lambda} \in \Pi_n^r$, il existe un $H_{r,1,n}^{\mathbf{u};q}(A)$-module $S^{\underline{\lambda}}$ tel que :

$$\mathrm{Irr}(H_{r,1,n}^{\mathbf{u};q}(K)) = \{S_K^{\underline{\lambda}} \mid \underline{\lambda} \in \Pi_n^r\}.$$

La détermination de $\mathrm{Irr}(H_{r,p,n}^{\mathbf{x};q}(K))$ s'en déduit en utilisant la théorie de Clifford et grâce à un peu de combinatoire.

Soit $\underline{\lambda} \in \Pi_n^r$. On pose $\underline{\lambda} = (\lambda^1, ..., \lambda^p)$ où les λ^i sont des d-multipartitions (rappellons que $d = r/p$). Soit

- $\sigma : (\lambda^1, ..., \lambda^p) \mapsto (\lambda^p, \lambda^1, ..., \lambda^{p-1})$.
- $\underline{\lambda} \sim \underline{\mu} \Leftrightarrow \exists i \in [0, p-1], \ \sigma^i(\underline{\lambda}) = \underline{\mu}$.
- $\tilde{\underline{\lambda}}$ la classe d'équivalence de $\underline{\lambda} \in \Pi_n^r$ et $c(\underline{\lambda}) := p/\text{Cardinal de}\tilde{\underline{\lambda}}$.

Soit $\underline{\lambda} \in \Pi^r_n$. On pose $\underline{\lambda} = (\lambda^1, ..., \lambda^p)$ où les λ^i sont des d-multipartitions (rappellons que $d = r/p$). Soit

- $\sigma : (\lambda^1, ..., \lambda^p) \mapsto (\lambda^p, \lambda^1, ..., \lambda^{p-1})$.
- $\underline{\lambda} \sim \underline{\mu} \Leftrightarrow \exists i \in [0, p-1],\ \sigma^i(\underline{\lambda}) = \underline{\mu}$.
- $\tilde{\underline{\lambda}}$ la classe d'équivalence de $\underline{\lambda} \in \Pi^r_n$ et $c(\underline{\lambda}) := p/\mathrm{Cardinal\ de}\tilde{\underline{\lambda}}$.

Alors Ariki et Genet ont montré :

$$\mathrm{Res}(S_K^{\underline{\lambda}}) = \bigoplus_{i=1}^{c(\lambda)} S_K(\tilde{\underline{\lambda}}, i),$$

où $S_K(\tilde{\underline{\lambda}}, i) \in \mathrm{Irr}(H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K))$ pour $i \in [1, c(\underline{\lambda})]$.

On obtient :

$$\mathrm{Irr}(H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K)) = \{S_K(\tilde{\underline{\lambda}}, i) \mid \underline{\lambda} \in \Pi^r_n,\ 1 \leqslant i \leqslant c(\underline{\lambda})\}.$$

Le cas non semi-simple

Théorème (Ariki, Ariki-Mathas)

Soit Λ_n^0 l'ensemble des r-multipartitions Kleshchev de rang n, alors :

$$\mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) = \left\{D^{\underline{\lambda}} := S_{\mathbb{C}}^{\underline{\lambda}}/rad(S_{\mathbb{C}}^{\underline{\lambda}}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_n^0\right\}.$$

Le cas non semi-simple

Théorème (Ariki, Ariki-Mathas)

Soit Λ_n^0 l'ensemble des r-multipartitions Kleshchev de rang n, alors :

$$\operatorname{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) = \left\{D^{\underline{\lambda}} := S_{\mathbb{C}}^{\underline{\lambda}}/rad(S_{\mathbb{C}}^{\underline{\lambda}}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_n^0\right\}.$$

Problème : La restriction de $D^{\underline{\lambda}}$ à $H_{r,p,n}^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}(\mathbb{C})$ est beaucoup plus compliquée à décrire.

Le cas non semi-simple

Théorème (Ariki, Ariki-Mathas)

Soit Λ_n^0 l'ensemble des r-multipartitions Kleshchev de rang n, alors :

$$\operatorname{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) = \left\{D^{\underline{\lambda}} := S_{\mathbb{C}}^{\underline{\lambda}}/rad(S_{\mathbb{C}}^{\underline{\lambda}}) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_n^0\right\}.$$

Problème : La restriction de $D^{\underline{\lambda}}$ à $H_{r,p,n}^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}(\mathbb{C})$ est beaucoup plus compliquée à décrire.

Par exemple, si $r = p = 2$ et $\theta(q)$ est une racine primitive de l'unité d'ordre 4, $H_{2,2,n}$ est une algèbre de Hecke de type D_n, $H_{2,1,n}$ est une algèbre de Hecke de type B_n.

Pour $n = 4$, on a $(2.1, 1) \in \Lambda_4^0$ et$D^{(2.1,1)}$ *est le seul module simple $H_{2,1,n}$ avec une restriction isomorphe à une somme de deux $H_{2,2,n}$-modules simples ...*

La spécialisation $\theta : A \to \mathbb{C}$ induit une application de décomposition entre les groupes de Grothendieck associés.

$$\begin{array}{ccc} R_0(H^{\mathbf{u},q}_{r,1,n}(K))) & \xrightarrow{\text{Res}} & R_0(H^{\mathbf{x},q}_{r,p,n}(K)) \\ \Big\downarrow d & & \Big\downarrow d^p \\ R_0(H^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}_{r,1,n}(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\text{Res}} & R_0(H^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}_{r,p,n}(\mathbb{C})) \end{array}$$

On note ici :

$$D = (d_{V,M})_{V \in \mathrm{Irr}\left(H^{(\mathbf{u}),q}_{r,1,n}(K)\right), M \in \mathrm{Irr}\left(H^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}_{r,1,n}(\mathbb{C})\right)}$$

$$D^p = (d^p_{U,N})_{U \in \mathrm{Irr}\left(H^{(\mathbf{x}),q}_{r,p,n}(K)\right), N \in \mathrm{Irr}\left(H^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}_{r,p,n}(\mathbb{C})\right)}$$

les matrices de décomposition.

Par Ariki et Uglov, on a :

$$\mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) \longleftrightarrow$$

Parametrisation de la base canonique du $U_q(\widehat{sl}_e)$ module associé de php.

Par Ariki et Uglov, on a :

$$\operatorname{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) \longleftrightarrow \begin{array}{c}\text{Parametrisation de la}\\ \text{base canonique du}\\ U_q(\widehat{sl}_e)\text{ module associé de php.}\end{array}$$

Ces éléments peuvent être indexés par différentes classes de multipartitions Λ_n^i ($i = 0$ donne les multipartitions Kleshchev, $i = 1$ une classe de multipartitions défini par Foda et al.).

Théorème (Geck-Rouquier, J)

Pour tout i, il existe une fonction

$$a_i : \mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) \to \mathbb{N},$$

tel que pour tout $M \in \mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right)$, il existe $\underline{\lambda}_M \in \Lambda_n^i$ tel que :

$$d([S_K^{\underline{\lambda}_M}]) = [M] + \sum_{a_i(N)<a_i(M)} d_{S_K^{\underline{\lambda}_M},N}[N].$$

de plus l'application $M \mapsto \underline{\lambda}_M$ est injective.

Théorème (Geck-Rouquier, J)

Pour tout i, il existe une fonction

$$a_i : \mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) \to \mathbb{N},$$

tel que pour tout $M \in \mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right)$, il existe $\underline{\lambda}_M \in \Lambda_n^i$ tel que :

$$d([S_K^{\underline{\lambda}_M}]) = [M] + \sum_{a_i(N)<a_i(M)} d_{S_K^{\underline{\lambda}_M},N}[N].$$

de plus l'application $M \mapsto \underline{\lambda}_M$ est injective.

Or pour $i = 1$, Λ_n^1 a une définition simple (non récursive) et de bonnes propriétés.

- $\underline{\lambda} \in \Lambda_n^1 \Longleftrightarrow \sigma(\underline{\lambda}) \in \Lambda_n^1$
- $a_1(D^{\underline{\lambda}}) = a_1({}^f D^{\underline{\lambda}})$.

- $\underline{\lambda} \in \Lambda_n^1 \Longleftrightarrow \sigma(\underline{\lambda}) \in \Lambda_n^1$
- $a_1(D^{\underline{\lambda}}) = a_1({}^f D^{\underline{\lambda}})$.

Pour $M \in \operatorname{Irr}\left(H_{r,p,n}^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right)$, on pose :

$$a_1^p(M) := a_1(D^{\underline{\lambda}}) \text{ ssi } M \text{ est dans } \operatorname{Res}(D^{\underline{\lambda}})$$

Théorème (Genet-J)

Pour tout $M \in \mathrm{Irr}\left(H_{r,p,n}^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right)$*, il existe* $\underline{\lambda}_M \in \Lambda_n^1$ *et* $j_M \in [1, c(\underline{\lambda}_M)]$*:*

$$d^p([S_K(\widetilde{\underline{\lambda}_M}, j_M)]) = [M] + \sum_{a_1^p(N) < a_1^p(M)} d^p_{S_K(\widetilde{\underline{\lambda}_M}, j_M), N}[N].$$

De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}\left(H_{r,p,n}^{\theta(\mathbf{x}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right) & \to & \left\{(\tilde{\underline{\lambda}}, j) \mid \underline{\lambda} \in \Lambda_n^1, j \in [1, c(\underline{\lambda})]\right\} \\ M & \mapsto & (\widetilde{\underline{\lambda}_M}, j_M) \end{array}$$

est bijective et on a

$$o_{g,M} = c(\underline{\lambda}_M).$$

3 - Exemple : type D_n

Soit $A := \mathbb{C}[q, q^{-1}]$, $\theta : A \to \mathbb{C}$ tel que $\theta(q) = \exp(\frac{2i\pi}{e})$ avec e pair.

- $H_{2,1,n}$ est une algèbre de Hecke de type B_n.
- $H_{2,2,n}$ est une algèbre de Hecke de type D_n qui peut être vu comme une sous-algèbre de $H_{2,1,n}$.

3 - Exemple : type D_n

Soit $A := \mathbb{C}[q, q^{-1}]$, $\theta : A \to \mathbb{C}$ tel que $\theta(q) = \exp(\frac{2i\pi}{e})$ avec e pair.

- $H_{2,1,n}$ est une algèbre de Hecke de type B_n.
- $H_{2,2,n}$ est une algèbre de Hecke de type D_n qui peut être vu comme une sous-algèbre de $H_{2,1,n}$.

On a :

$$\mathrm{Irr}(H_{2,1,n}(K)) = \{S_K^{(\lambda^{(0)},\lambda^{(1)})} \mid (\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \in \Pi_n^2\}.$$

et l'ensemble des $H_{2,2,n}(K)$ modules simples est :

$$\left\{V^{[\lambda^0,\lambda^1]} \mid (\lambda^0, \lambda^1) \in \Pi_n^2,\ \lambda^0 \neq \lambda^1\right\}$$
$$\bigcup \left\{V^{[\lambda,\pm]} \mid \lambda \in \Pi^1_{\frac{n}{2}}\right\}$$

Définition

Pour $l = 2$, *on a* $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \in \Lambda_n^1$ *ssi :*

Définition

Pour $l = 2$, *on a* $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}) \in \Lambda_n^1$ *ssi :*

- $\forall i,\ \lambda_i^{(0)} \geqslant \lambda_{i+\frac{e}{2}}^{(1)}$ *et* $\lambda_i^{(1)} \geqslant \lambda_{i+\frac{e}{2}}^{(0)}$
- *Pour chaque boîte* γ *du diagramme de Young de* $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$ *à la* $b^{i\grave{e}me}$ *colonne et la* $a^{i\grave{e}me}$ *ligne de* $\lambda^{(c)}$, *on associe son résidu :*

$$res(\gamma) \equiv b - a + \frac{ce}{2}\ (mod\ e).$$

Alors, pour tout $k > 0$, *parmi les résidu sur la frontière des parts de longueurs* k , *au moins un résidu de* $\{0, 1, ..., e-1\}$ *n'apparait pas.*

Pour $M \in \mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right)$, si on a :

$$d([S_K^{\underline{\lambda}_M}]) = [M] + \sum_{a_1(N)<a_1(M)} d_{S_K^{\underline{\lambda}_M},N}[N],$$

alors

$$\begin{array}{c} \mathrm{Res}(S_K^{\underline{\lambda}_M}) \text{ se scinde en} \\ l \text{ modules simples} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \mathrm{Res}(M) \text{ se scinde en} \\ l \text{ modules simples} \end{array}$$

Donc si on connait la bijection

$$\underline{\lambda}_M \in \Lambda_n^1 \leftrightarrow \mathrm{Irr}\left(H_{r,1,n}^{\theta(\mathbf{u}),\theta(q)}(\mathbb{C})\right),$$

on peut décrire la restriction des $D^{\underline{\lambda}}$ où $\underline{\lambda} \in \Lambda_n^0$

Λ_4^0	Λ_4^1
$(4, \emptyset)$	$(4, \emptyset)$
$(3.1, \emptyset)$	$(3.1, \emptyset)$
$(2.2, \emptyset)$	$(2.2, \emptyset)$
$(2.1.1, \emptyset)$	$(2.1, 1)$
$(3, 1)$	$(3, 1)$
$(2.1, 1)$	$(2, 2)$
$(1.1.1, 1)$	$(1.1.1, 1)$
$(2, 2)$	$(\emptyset, 4)$
$(1.1, 2)$	$(1.1, 2)$
$(1, 3)$	$(1, 3)$
$(2, 1.1)$	$(2, 1.1)$
$(1.1, 1.1)$	$(1, 2.1)$
$(1, 2.1)$	$(\emptyset, 3.1)$
$(\emptyset, 2.2)$	$(\emptyset, 2.2)$
$(1, 1.1.1)$	$(1, 1.1.1)$

Λ_4^0	Λ_4^1
$(4, \emptyset)$	$(4, \emptyset)$
$(3.1, \emptyset)$	$(3.1, \emptyset)$
$(2.2, \emptyset)$	$(2.2, \emptyset)$
$(2.1.1, \emptyset)$	$(2.1, 1)$
$(3, 1)$	$(3, 1)$
$(2.1, 1)$	$(2, 2)$
$(1.1.1, 1)$	$(1.1.1, 1)$
$(2, 2)$	$(\emptyset, 4)$
$(1.1, 2)$	$(1.1, 2)$
$(1, 3)$	$(1, 3)$
$(2, 1.1)$	$(2, 1.1)$
$(1.1, 1.1)$	$(1, 2.1)$
$(1, 2.1)$	$(\emptyset, 3.1)$
$(\emptyset, 2.2)$	$(\emptyset, 2.2)$
$(1, 1.1.1)$	$(1, 1.1.1)$