

# Une (nouvelle ?) construction du groupe de réflexion complexe $G_{31}$

C. BONNAFÉ

31 octobre 2002

**Résumé :** Dans la classification de Shephard-Todd des groupes de réflexions, le groupe noté  $G_{31}$  apparaît comme le seul groupe de réflexion irréductible en rang 4 d'ordre 46080. Nous en donnons ici une construction totalement élémentaire à partir du groupe de Weyl de type  $B_6$ .

**MSC Classification -** 20F55

Si  $Z$  désigne le sous-groupe central d'ordre 2 du groupe de réflexion complexe  $G_{31}$  (voir la classification de Shephard-Todd [ST]), alors  $G_{31}/Z \not\cong W(D_6)$  (où  $W(D_6)$  désigne un groupe de Weyl de type  $D_6$ ), bien que l'on ait une suite exacte

$$1 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5 \longrightarrow G_{31}/Z \longrightarrow \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1.$$

En fait,  $G_{31}/Z(G_{31}) \not\cong W(D_6)/Z(W(D_6))$  (voir [BMR, table 3]).

Cependant, on peut vérifier grâce à **GAP** que  $D(G_{31})/Z \simeq D(W(D_6))$ . En voici une explication :  $G_{31}$  agit sur un espace vectoriel  $V$  de dimension 4 donc  $G_{31}/Z$  agit sur la puissance extérieure deuxième  $\bigwedge^2 V$  qui est de dimension 6. C'est à travers cette action que l'on obtient l'isomorphisme annoncé.

En fait, à partir de ce constat, nous proposons ici de renverser le point de vue. Nous nous donnons un groupe de Weyl  $W_6$  de type  $B_6$  sur  $\bigwedge^2 V$  (notons que  $W_6$  contient comme sous-groupe distingué d'indice 2 un groupe de Weyl de type  $D_6$ ) et construisons à partir de lui et de façon élémentaire un sous-groupe de  $\mathbf{GL}(V)$  dont nous montrons que ce ne peut-être que le groupe  $G_{31}$ . Nous déduisons des propriétés classiques de  $W_6$  et de ses sous-groupes (par exemple de l'existence d'un automorphisme non intérieur de  $\mathfrak{S}_6$ ) certaines propriétés du groupe  $G_{31}$  (structure du groupe dérivé, de son plus grand 2-sous-groupe distingué, nombre minimal de réflexions nécessaires pour engendrer  $G_{31}$ ...).

Dans la preuve de nos résultats, nous n'utilisons pas **GAP**. C'est tout de même un peu artificiel : il nous a été d'un grand secours pour nous donner des idées de démonstration. Il nous a aussi servi à établir certaines des remarques que nous avons rajoutées au long de ce texte.

**NOTATIONS -** Si  $H$  est un groupe fini, nous notons  $D(H)$  son groupe dérivé,  $Z(H)$  son centre et  $O_2(H)$  son plus grand 2-sous-groupe distingué. Si  $g$  et  $h$  sont deux éléments de

$H$ , nous posons  $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ . Si  $n$  est un entier naturel non nul, nous notons  $\mathfrak{S}_n$  (respectivement  $\mathfrak{A}_n$ ) le groupe symétrique (respectivement alterné) de degré  $n$ .

## 1. CONSTRUCTION DE $G_{31}$

**1.A. Puissance extérieure deuxième d'un espace de dimension 4.** Soit  $V$  un espace vectoriel complexe de dimension 4. Nous fixons une fois pour toutes un générateur  $\varepsilon$  de  $\bigwedge^4 V$ . Le choix de ce générateur nous permet d'identifier  $\bigwedge^4 V$  avec  $\mathbb{C}$  et donc de construire une forme bilinéaire

$$\begin{aligned} \beta_\wedge : \bigwedge^2 V \times \bigwedge^2 V &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x \wedge y. \end{aligned}$$

Il est immédiat que  $\beta_\wedge$  est symétrique et non dégénérée.

Nous notons  $\Lambda : \mathbf{GL}(V) \rightarrow \mathbf{GL}(\bigwedge^2 V)$ ,  $g \mapsto g \wedge g$ . C'est un morphisme de groupes algébriques. On a

$$(1.1) \quad \text{Ker } \Lambda = \{\text{Id}_V, -\text{Id}_V\}.$$

Le noyau de  $\Lambda$  sera noté  $Z$  dans la suite. D'autre part, si  $g \in \mathbf{GL}(V)$  et si  $x, y \in \bigwedge^2 V$ , alors

$$(1.2) \quad \det \Lambda(g) = (\det g)^3$$

et

$$(1.3) \quad \beta_\wedge(\Lambda(g)(x), \Lambda(g)(y)) = (\det g)\beta_\wedge(x, y).$$

La dernière égalité est simplement une autre écriture de la définition du déterminant. Les égalités 1.2 et 1.3 montrent que l'image de  $\mathbf{SL}(V)$  est contenue dans  $\mathbf{SO}(\bigwedge^2 V, \beta_\wedge)$ . En fait, pour des raisons de dimension et de connexité, on a

$$\Lambda(\mathbf{SL}(V)) = \mathbf{SO}(\bigwedge^2 V, \beta_\wedge).$$

Par conséquent,  $\Lambda$  induit un isomorphisme de groupes algébriques

$$(1.4) \quad \mathbf{SL}(V)/\{\text{Id}_V, -\text{Id}_V\} \simeq \mathbf{SO}(\bigwedge^2 V, \beta_\wedge).$$

**REMARQUE 1.5** - L'isomorphisme 1.4 explique l'égalité des diagrammes de Dynkin de type  $A_3$  et  $D_3$ . Il montre aussi que  $\mathbf{SL}(V) \simeq \mathbf{Spin}(\bigwedge^2 V, \beta_\wedge)$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_6(\mathbb{C})$ .  $\square$

**REMARQUE 1.6** - Soit  $\psi^*$  une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur  $V$ . On peut voir  $\psi^*$  comme un élément de  $\bigwedge^2 V^*$ . Or,  $\bigwedge^2 V^* \simeq (\bigwedge^2 V)^*$  et  $\beta_\wedge$  induit un isomorphisme  $(\bigwedge^2 V)^* \simeq \bigwedge^2 V$ . Notons  $\psi$  l'élément de  $\bigwedge^2 V$  correspondant à  $\psi^*$  via ces isomorphismes. Alors  $\mathbf{Sp}(V, \psi^*)$  stabilise  $\psi$ , donc stabilise  $\psi^\perp$  (l'orthogonal pour la forme

bilinéaire symétrique  $\beta_\lambda$ ). On obtient donc un morphisme de groupes algébriques  $\Lambda' : \mathbf{Sp}(V, \psi^*) \rightarrow \mathbf{SO}(\psi^\perp, \beta_\lambda)$ . On a  $\text{Ker } \Lambda' = \text{Ker } \Lambda$  et  $\Lambda'$  est surjectif pour des raisons de dimension et de connexité. On a donc construit un isomorphisme de groupes algébriques

$$\mathbf{Sp}(V, \psi^*) / \{\text{Id}_V, -\text{Id}_V\} \simeq \mathbf{SO}(\psi^\perp, \beta_\lambda).$$

Cet isomorphisme explique l'égalité des diagrammes de Dynkin de type  $B_2$  et  $C_2$  et montre que  $\mathbf{Sp}(V, \psi^*) \simeq \mathbf{Spin}(\psi^\perp, \beta_\lambda)$ , c'est-à-dire que  $\mathbf{Sp}_4(\mathbb{C}) \simeq \mathbf{Spin}_5(\mathbb{C})$ .  $\square$

**1.B. Groupes de Weyl de type  $B_6$  et  $D_6$  sur  $\bigwedge^2 V$ .** Nous fixons maintenant une base orthonormale  $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6)$  de  $\bigwedge^2 V$  pour la forme  $\beta_\lambda$ . Nous notons  $\mathbf{T}$  le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel  $\bigwedge^2 V$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est diagonale. Quand nous écrivons un élément de  $\mathbf{GL}(\bigwedge^2 V)$  sous forme matricielle, il sera sous-entendu que c'est relativement à la base  $\mathcal{B}$ . Nous identifions le groupe  $\mathfrak{S}_6$  avec le sous-groupe de  $\mathbf{O}(\bigwedge^2 V, \beta_\lambda)$  des permutations des éléments de la base  $\mathcal{B}$ . Notons que  $\mathfrak{S}_6$  normalise  $\mathbf{T}$  et que l'application

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbf{T} \rtimes \mathfrak{S}_6 &\longrightarrow \mathbb{C}^\times \\ t \rtimes \sigma &\longmapsto \det t \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes algébriques. On note

$$\pi : \mathbf{T} \rtimes \mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_6$$

la projection canonique. Posons maintenant

$$\begin{aligned} W_6 &= \mathbf{O}(\bigwedge^2 V, \beta_\lambda) \cap (\mathbf{T} \rtimes \mathfrak{S}_6), \\ W_6^+ &= W_6 \cap \text{Ker}(\det), \\ W'_6 &= W_6 \cap \text{Ker } \gamma, \\ \mathcal{W}_6 &= \langle W_6^+, i \text{Id}_{\bigwedge^2 V} \rangle \\ \text{et} \quad \mathcal{W}'_6 &= \mathcal{W}_6 \cap \text{Ker } \gamma. \end{aligned}$$

Ici,  $i$  désigne un nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ . Alors  $W_6$  (respectivement  $W'_6$ ) est un groupe de Weyl de type  $B_6$  (respectivement  $D_6$ ). On pose maintenant

$$A_6 = W_6 \cap \mathbf{T} = \{\text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in \mathbf{T} \mid \forall 1 \leq k \leq 6, a_k^2 = 1\}$$

et  $A'_6 = W'_6 \cap A_6 = \{\text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in A_6 \mid a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = 1\}$ .

Alors  $A_6 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^6$  et  $A'_6 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ . On vérifie facilement le résultat suivant :

**(1.7)**  $A'_6$  est engendré par  $([\sigma, a])_{\sigma \in \mathfrak{A}_6, a \in A'_6}$ .

Il découle de 1.7 que  $D(D(W_6)) = D(W_6) = A'_6 \rtimes \mathfrak{A}_6$ . D'autre part, on a

$$A'_6 = W_6^+ \cap A_6 = \mathcal{W}_6 \cap A_6 = \mathcal{W}'_6 \cap A_6 = D(W_6) \cap A_6$$

et on a des suites exactes

$$(1.8) \quad 1 \longrightarrow A_6 \longrightarrow W_6 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1,$$

$$(1.9) \quad 1 \longrightarrow A'_6 \longrightarrow W'_6 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1,$$

$$(1.10) \quad 1 \longrightarrow A'_6 \longrightarrow W_6^+ \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1,$$

$$(1.11) \quad 1 \longrightarrow \mathcal{W}_6 \cap \mathbf{T} \longrightarrow \mathcal{W}_6 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1,$$

$$(1.12) \quad 1 \longrightarrow A'_6 \longrightarrow \mathcal{W}'_6 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1$$

et

$$(1.13) \quad 1 \longrightarrow A'_6 \longrightarrow D(W_6) \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_6 \longrightarrow 1.$$

Par conséquent, on a

$$D(W_6) = D(W'_6) = D(W_6^+) = D(\mathcal{W}_6) = D(\mathcal{W}'_6) = W'_6 \cap W_6^+, \\ |W_6| = |\mathcal{W}_6| = 46080 = 2^6 \cdot 6! = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\text{et} \quad |W'_6| = |W_6^+| = |\mathcal{W}'_6| = 23040 = 2^5 \cdot 6! = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

**Lemme 1.14.** *Le groupe  $D(W_6)$  est un sous-groupe irréductible de  $\mathbf{GL}(\bigwedge^2 V)$ .*

*Démonstration.* Supposons trouvé un sous-espace vectoriel  $V'$  non trivial de  $\bigwedge^2 V$  qui est stable par  $D(W_6)$ . Par semi-simplicité, on peut supposer que  $\dim V' \leq 3$ . Puisque  $V'$  est stable sous l'action de  $\mathfrak{A}_6$ , on a  $V' = \mathbb{C}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6)$ . Mais  $\text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1, 1) \in A'_6$  ne stabilise alors pas  $V'$ , ce qui est contraire à l'hypothèse. ■

**Lemme 1.15.** *Soit  $H$  un sous-groupe distingué de  $W'_6$  (respectivement  $W_6^+$ , respectivement  $\mathcal{W}'_6$ ) tel que  $\pi(H) = \mathfrak{S}_6$ . Alors  $H$  est égal à  $W'_6$  (respectivement  $W_6^+$ , respectivement  $\mathcal{W}'_6$ ).*

*Démonstration.* Il nous suffit de montrer que  $A'_6 \subset H$ . Si  $\sigma \in \mathfrak{S}_6$ , on note  $\tilde{\sigma}$  un élément de  $H$  tel que  $\pi(\tilde{\sigma}) = \sigma$ . Si  $a \in A'_6$ , alors  $\tilde{\sigma} a \tilde{\sigma}^{-1} = \sigma a \sigma^{-1}$ . D'autre part,  $\tilde{\sigma} a \tilde{\sigma}^{-1} a^{-1} = [\sigma, a] \in H$  car  $H$  est distingué. Le résultat découle alors de 1.7. ■

**1.C. Une définition de  $\mathbf{G}_{31}$ .** Notons  $\sqrt{\mathbf{SL}}(V)$  le sous-groupe de  $\mathbf{GL}(V)$  formé des éléments de déterminant 1 ou  $-1$  et posons  $\mathbf{iSO}(V, \beta_\lambda) = \langle \mathbf{SO}(V, \beta_\lambda), i \text{Id}_{\bigwedge^2 V} \rangle$ . Il est alors clair que  $\sqrt{\mathbf{SL}}(V) = \langle \mathbf{SL}(V), \zeta \text{Id}_V \rangle$  (où  $\zeta \in \mathbb{C}^\times$  est une racine primitive huitième de l'unité). Par conséquent,

$$\Lambda^{-1}(\mathbf{iSO}(\bigwedge^2 V, \beta_\lambda)) = \sqrt{\mathbf{SL}}(V) \quad \text{et} \quad \Lambda(\sqrt{\mathbf{SL}}(V)) = \mathbf{iSO}(\bigwedge^2 V, \beta_\lambda).$$

Nous posons la définition suivante :

$$G_{31} = \Lambda^{-1}(\mathcal{W}'_6)$$

Alors  $G_{31}$  est un sous-groupe de  $\sqrt{\mathbf{SL}}(V)$  car  $\mathcal{W}'_6 \subset \mathbf{iSO}(V, \beta_\wedge)$ . Avant de construire un ensemble de réflexions engendrant  $G_{31}$ , nous énonçons un résultat qui nous sera utile :

**Lemme 1.16.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $G_{31}$  tel que  $\Lambda(G) = \mathcal{W}'_6$ . Alors  $G = G_{31}$ .*

*Démonstration.* On a  $-\text{Id}_{\Lambda^2 V} \in \mathcal{W}'_6$ . Donc au moins l'un des éléments  $i \text{Id}_V$  ou  $-i \text{Id}_V$  appartient à  $G$ . Donc  $-\text{Id}_V = (i \text{Id}_V)^2 = (-i \text{Id}_V)^2 \in G$ . Par conséquent,  $G = G_{31}$ . ■

Notons  $\mu_0$  l'élément de  $W_6^+$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note  $M$  la classe de conjugaison de  $\mu_0$  dans  $W_6^+$ . Notons que  $\mu_0$  et  $-\mu_0$  sont conjugués dans  $W_6$  mais ne le sont pas dans  $W_6^+$  : en effet, on a

$$-\mu_0 = t_0 \mu_0 t_0^{-1},$$

où  $t_0 = \text{diag}(1, -1, 1, -1, 1, -1) \notin W_6^+$  et un calcul élémentaire donne que  $C_{W_6}(\mu_0) \subset W_6^+$ . Cela montre que la classe de conjugaison de  $\mu_0$  dans  $W_6$  est la réunion disjointe de  $M$  et  $-M$ .

Si  $\mu \in M$ , alors le polynôme caractéristique de  $\mu$  est  $(X - i)^3(X + i)^3$ . Par suite, le polynôme caractéristique de  $i\mu$  est  $(X - 1)^3(X + 1)^3$ . Donc  $\Lambda^{-1}(\{i\mu, -i\mu\}) = \{\tilde{\mu}, i\tilde{\mu}, -\tilde{\mu}, -i\tilde{\mu}\}$  où  $\tilde{\mu}$  est une réflexion. Or,  $i\mu$  et  $-i\mu$  appartiennent à  $\mathcal{W}'_6$  donc  $\tilde{\mu} \in G_{31}$ . On pose  $\tilde{M} = \{\tilde{\mu} \mid \mu \in M\}$ ;  $\tilde{M}$  est un ensemble de réflexions de  $G_{31}$ .

*Par la suite, on supposera que  $i$  est choisi de sorte que  $\Lambda^{-1}(i\mu_0) = \{\tilde{\mu}_0, -\tilde{\mu}_0\}$ .*

**Lemme 1.17.** *Si  $\mu \in M$ , alors  $\Lambda^{-1}(i\mu) = \{\tilde{\mu}, -\tilde{\mu}\}$ . De plus,  $\tilde{M}$  est une classe de conjugaison de  $G_{31}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu \in M$ . Puisque  $\mu$  et  $\mu_0$  sont conjugués dans  $W_6^+$  et puisque  $\mu_0 \notin D(W_6)$ , il existe  $w \in D(W_6)$  tel que  $\mu = w\mu_0 w^{-1}$ . De plus,  $D(W_6) \subset \mathcal{W}'_6$ , donc il existe  $g \in G_{31}$  tel que  $\Lambda(g) = w$ . Par suite,  $\Lambda(g\tilde{\mu}_0 g^{-1}) = w i \mu_0 w^{-1} = i\mu$ . Puisque  $g\tilde{\mu}_0 g^{-1}$  est une réflexion, on en déduit que  $g\tilde{\mu}_0 g^{-1} = \tilde{\mu}$ . Donc  $\Lambda^{-1}(i\mu) = \{\tilde{\mu}, -\tilde{\mu}\}$  et  $\tilde{M}$  est bien une classe de conjugaison dans  $G_{31}$ . □

**Théorème 1.18.** *Le groupe  $G_{31}$  est un sous-groupe de réflexion complexe irréductible d'ordre 46080 de  $\mathbf{GL}(V)$ . On a  $G_{31} = \langle \tilde{M} \rangle$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord  $G_{31}$  est irréductible car son image  $\mathcal{W}'_6$  est un sous-groupe irréductible de  $\mathbf{GL}(\wedge^2 V)$  d'après le lemme 1.14. De plus,  $|G_{31}| = 2|\mathcal{W}'_6| = |W_6| = 46080$ .

Notons  $G$  le sous-groupe de  $G_{31}$  engendré par  $\tilde{M}$ . Alors  $\Lambda(G)$  est le sous-groupe de  $\mathcal{W}'_6$  engendré par  $\Lambda(\tilde{M})$ . Or, d'après le lemme 1.17,  $\Lambda(\tilde{M})$  est une classe de conjugaison de  $\mathcal{W}'_6$ . Donc  $G$  un sous-groupe distingué de  $\mathcal{W}'_6$ . D'autre part,  $\pi(\Lambda(G))$  est un sous-groupe distingué de  $\mathfrak{S}_6$  contenant  $\pi(\mu_0) = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$ . Donc  $\pi(\Lambda(G)) = \mathfrak{S}_6$ . Il résulte du lemme 1.15 que  $\Lambda(G) = \mathcal{W}'_6$ . Donc, d'après le lemme 1.16, on a  $G = G_{31}$ . ■

Le théorème 1.18 montre que le groupe  $G_{31}$  est bien le groupe de réflexion complexe noté  $G_{31}$  dans la classification de Shephard et Todd [ST].

## 2. QUELQUES PROPRIÉTÉS DU GROUPE $G_{31}$

Nous allons ici établir quelques propriétés bien connues du groupe  $G_{31}$  (groupe dérivé, centre, 2-sous-groupes distingués, nombre minimal de réflexions engendrant  $G_{31}$ ) en utilisant simplement les propriétés du groupe  $\mathcal{W}'_6$ . Dans cette section, nous noterons  $\rho$  la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors  $\rho \in W_6^+$  et  $\gamma(\rho) = -1$ . Donc

$$(2.1) \quad i\rho \in \mathcal{W}'_6 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(i\rho) = 2i \notin \mathbb{Q}.$$

**2.A. Scission des suites exactes.** Nous allons ici essentiellement étudier les suites exactes 1.8 à 1.13. Nous allons notamment déterminer si elles sont scindées ou non. Nous aurons besoin pour cela du résultat élémentaire suivant :

**Lemme 2.2.** *Soit  $f : \mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathbf{T} \times \mathfrak{S}_6$  un morphisme de groupes tel que  $\pi \circ f = \text{Id}_{\mathfrak{S}_6}$ . Alors  $f(\mathfrak{S}_6) \subset \text{Ker } \gamma$ .*

*Démonstration.* Notons  $c = (1, 2, 3, 4, 5, 6) \in \mathfrak{S}_6$ . Si  $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) \in (\mathbb{C}^\times)^6$ , alors

$$c \operatorname{diag}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) c^{-1} = \operatorname{diag}(t_6, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5).$$

Écrivons

$$f(c) = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) c$$

avec  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) \in (\mathbb{C}^\times)^6$ . Puisque  $f(c)^6 = \operatorname{Id}_{\wedge^2 V}$ , on a  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 = 1$ . Donc  $f(c) \in \operatorname{Ker} \gamma$ . Par conséquent,  $f(c') \in \operatorname{Ker} \gamma$  pour tout cycle  $c'$  de longueur 6. Donc  $f(\mathfrak{S}_6) \subset \operatorname{Ker} \gamma$ . ■

Pour la suite de cet article, nous n'aurons besoin que des résultats de la proposition suivante concernant les groupes  $W'_6$  et  $\mathcal{W}'_6$ . Nous énonçons cependant les autres par souci d'exhaustivité.

**Proposition 2.3.** (a) *Les suites 1.8, 1.9 et 1.13 sont scindées grâce aux inclusions  $\mathfrak{S}_6 \subset W'_6 \subset W_6$  et  $\mathfrak{A}_6 \subset D(W_6)$ .*

(b) *La suite exacte*

$$1 \longrightarrow A'_6/Z(\mathcal{W}'_6) \longrightarrow \mathcal{W}'_6/Z(\mathcal{W}'_6) \longrightarrow \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1$$

*n'est pas scindée. Les groupes  $\mathcal{W}'_6/Z(\mathcal{W}'_6)$  et  $W'_6/Z(W'_6)$  ne sont pas isomorphes.*

(c) *Les suites exactes 1.10, 1.11 et 1.12 ne sont pas scindées.*

(d) *Les groupes  $W_6$  et  $\mathcal{W}_6$  ne sont pas isomorphes.*

(e) *Les groupes  $\mathcal{W}'_6$  et  $W'_6$  ne sont pas isomorphes.*

(f) *Les groupes  $W_6^+$  et  $\mathcal{W}'_6$  ne sont pas isomorphes.*

REMARQUE - Bien qu'ils ne soient pas isomorphes, un calcul avec **GAP** montre que les groupes  $W'_6/Z(W'_6)$  et  $\mathcal{W}'_6/Z(\mathcal{W}'_6)$  ont la même table de caractères. En revanche, les groupes  $W_6$  et  $\mathcal{W}_6$  ont tous deux 37 classes de conjugaison mais n'ont pas la même table de caractères : celle de  $\mathcal{W}'_6$  contient des valeurs irrationnelles comme le montre 2.1.

Pour finir, toujours d'après **GAP**, les groupes  $W_6^+$  et  $\mathcal{W}'_6$  ne sont pas isomorphes. □

*Démonstration.* (a) est évident.

(b) Compte tenu du (a) et du fait que  $A'_6 = O_2(\mathcal{W}'_6) = O_2(W'_6)$ , les deux assertions sont équivalentes. Nous allons montrer que la suite exacte n'est pas scindée.

Supposons-là scindée. Alors il existe deux éléments  $g$  et  $h$  dans  $\mathcal{W}'_6$  tels que

$$(\alpha) \quad \pi(g) = (1, 2, 3, 4) \text{ et } \pi(h) = (5, 6).$$

$$(\beta) \quad h^2 \in Z(\mathcal{W}'_6).$$

$$(\gamma) \quad [g, h] \in Z(\mathcal{W}'_6).$$

D'après 2.1 et  $(\alpha)$ , il existe  $a \in A'_6$  tel que  $h = ia\rho$ . Donc, d'après  $(\beta)$ , on a  $a = \text{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4, b, b)$  avec  $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = a_4^2 = b^2 = a_1a_2a_3a_4 = 1$ . D'autre part, d'après  $(\alpha)$ , il existe  $a' \in A'_6$  tel que  $g = ia'\sigma$ , où

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose  $a' = \text{diag}(a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5, a'_6)$ , alors

$$[g, h] = \text{diag}(-a_1a_4, -a_1a_2, a_2a_3, a_3a_4, -a'_5a'_6, -a'_5a'_6).$$

Donc, d'après  $(\gamma)$ , on a  $-a_1a_4 = a_2a_3$ , et donc  $a_1a_2a_3a_4 = -1$ , ce qui est impossible.

(c) D'après (b), la suite 1.12 n'est pas scindée. Puisque  $W_6^+ \subset \mathcal{W}_6$ , il ne reste plus qu'à montrer que la suite 1.11 n'est pas scindée. Supposons qu'elle est scindée. Notons  $f : \mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathcal{W}_6$  une section du morphisme  $\pi$ . D'après le lemme 2.2,  $f(\mathfrak{S}_6) \subset \text{Ker } \gamma$ . Donc  $f(\mathfrak{S}_6) \subset \mathcal{W}'_6$ . En d'autres termes, la suite 1.12 est scindée, ce qui n'est pas possible.

(d) D'après le lemme 1.14, le centre de  $\mathcal{W}_6$  est d'ordre 4 tandis que celui de  $W_6$  est d'ordre 2.

(e) et (f) découlent immédiatement de (a), (c) et (d). ■

**2.B. Structure du groupe  $G_{31}$ .** La proposition suivante se déduit des propriétés du groupe  $\mathcal{W}'_6$  démontrées précédemment.

**Proposition 2.4.** (a)  $\tilde{M}$  est l'unique classe de conjugaison de  $G_{31}$  formée de réflexions.

(b)  $D(G_{31}) = G_{31} \cap \mathbf{SL}(V)$  et  $|G_{31}/D(G_{31})| = 2$ .

(c)  $Z(G_{31}) = \langle i \text{Id}_V \rangle$  et  $Z(G_{31}) \subset D(G_{31})$ .

(d)  $\Lambda$  induit un isomorphisme  $D(G_{31})/Z \simeq D(W_6)$ .

(e)  $O_2(G_{31}) = \Lambda^{-1}(A'_6) \subset D(G_{31})$  est non abélien et  $O_2(G_{31})/Z \simeq A'_6 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ .

(f) Les 2-sous-groupes distingués de  $G_{31}$  sont  $\{1\}$ ,  $Z$ ,  $Z(G_{31})$  et  $O_2(G_{31})$ .

(g) Les suites exactes

$$1 \longrightarrow O_2(G_{31})/Z(G_{31}) \longrightarrow G_{31}/Z(G_{31}) \xrightarrow{\pi \circ \Lambda} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow O_2(G_{31}) \longrightarrow G_{31} \xrightarrow{\pi \circ \Lambda} \mathfrak{S}_6 \longrightarrow 1$$

ne sont pas scindées.

(h) Les groupes  $G_{31}/Z(G_{31})$  et  $W'_6/Z(W'_6)$  ne sont pas isomorphes.

REMARQUE - Dans [BMR, table 3], il est annoncé que les groupes  $G_{31}/Z(G_{31})$  et  $W'_6/Z(W'_6)$  ne sont pas isomorphes (ce qui est exactement le (h) de la proposition 2.4 ci-dessus). En revanche, toujours dans [BMR, table 3], il est dit que la première suite exacte du (g) est scindée : ce n'est pas vrai comme le prouve l'argument ci-dessous (et comme peuvent le montrer aussi des calculs effectués avec GAP).  $\square$

*Démonstration.* (a) Soit  $s \in G_{31}$  une réflexion. Alors  $-i\Lambda(s) \in W_6^+$  a pour polynôme caractéristique  $(X - i)^3(X + i)^3$ . Or, les seuls éléments de  $W_6^+$  dont le polynôme caractéristique est  $(X - i)^3(X + i)^3$  sont les conjugués sous  $W_6$  de  $\mu_0$ . Donc  $-i\Lambda(s) = \varepsilon\mu$  avec  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  et  $\mu \in M$ . Donc  $s = \tilde{\mu}$  car  $s$  est une réflexion.

(b) D'après (a),  $G_{31}$  est engendré par une classe de conjugaison d'éléments d'ordre 2 donc  $|G_{31}/D(G_{31})| \leq 2$ . Mais  $D(G_{31})$  est contenu dans  $G_{31} \cap \mathbf{SL}(V)$  et ce dernier est d'indice 2 dans  $G_{31}$ . D'où le résultat.

(c) découle de (b) et du fait que  $G_{31}$  est irréductible sur  $V$  (voir théorème 1.18).

(d) Il suffit de remarquer que  $Z \subset D(G_{31})$ , ce qui résulte de (b).

(e) Le fait que  $O_2(G_{31}) = \Lambda^{-1}(A'_6)$  et que  $O_2(G_{31})/Z \simeq A'_6$  résulte de ce que  $O_2(W'_6) = A'_6$  car  $O_2(\mathfrak{S}_6) = 1$ . Le fait que  $O_2(G_{31}) \subset D(G_{31})$  découle alors du (b). Il nous reste à montrer que  $O_2(G_{31})$  n'est pas abélien.

Le nombre minimal de générateurs de  $O_2(G_{31})$  est 5 car  $O_2(G_{31})/Z \simeq A'_6 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ . Or, un groupe abélien dont le nombre minimal de générateurs est 5 n'admet pas de représentation fidèle de dimension 4. Donc  $O_2(G_{31})$  n'est pas abélien.

(f) Soit  $H$  un 2-sous-groupe distingué de  $G_{31}$  différent de  $\{1\}$ ,  $Z$  et  $O_2(G_{31})$ . Alors  $Z \subset H$  et, en appliquant le morphisme  $\Lambda$ , on obtient que  $\Lambda(H)$  est un 2-sous-groupe non trivial de  $A'_6$  stable par l'action de  $\mathfrak{S}_6$ . Donc  $\Lambda(H) = \{\text{Id}_{\Lambda^2 V}, -\text{Id}_{\Lambda^2 V}\}$ , ce qui montre que  $H = Z(G_{31})$ .

(g) Il est clair que la première suite est exacte. Le fait qu'elle est non scindée découle de la proposition 2.3 (b). Il en résulte immédiatement que la deuxième suite exacte n'est pas scindée.

(h) Puisque  $G_{31}/Z(G_{31}) = \mathcal{W}'_6/Z(\mathcal{W}'_6)$ , le résultat découle de la proposition 2.3 (b).  $\blacksquare$

**2.C. Engendrement par 5 réflexions.** La proposition suivante précise le lemme 1.16.

**Proposition 2.5.** *Si  $G$  est un sous-groupe de  $G_{31}$ , alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $G_{31} = G$ .
- (2)  $\mathcal{W}'_6 = \Lambda(G)$ .
- (3)  $\mathfrak{S}_6 = \pi(\Lambda(G))$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre (1) et (2) découle du lemme 1.16. Il est clair que (1) implique (3). Montrons que (3) implique (1). On suppose donc que  $\mathfrak{S}_6 = \pi(\Lambda(G))$ . On pose  $A = O_2(G_{31}) \cap G$  et  $A' = AZ$ .

Puisque  $Z \subset A'$  et  $O_2(G_{31})/Z$  est abélien,  $A'$  est distingué dans  $O_2(G_{31})$ . D'autre part, il est normalisé par  $G$ . Donc il est distingué dans  $G_{31}$ . Donc, d'après la proposition 2.4 (f), on a  $A' = Z$ ,  $Z(G_{31})$  ou  $O_2(G_{31})$ . Si  $A' = Z$  ou  $Z(G_{31})$ , alors la première suite exacte de la proposition 2.4 (g) serait scindée, ce qui est impossible. Donc  $A' = O_2(G_{31})$ . Par conséquent,  $G.Z = GA' = G_{31}$  et donc  $G = G_{31}$  d'après le lemme 1.16. ■

**Proposition 2.6.** *Le groupe  $G_{31}$  est engendré par 5 réflexions mais ne peut pas être engendré par 4 réflexions.*

*Démonstration.* Nous noterons  $\tau : \mathfrak{S}_6 \rightarrow \mathfrak{S}_6$  un automorphisme non intérieur de  $\mathfrak{S}_6$ . Par construction,  $\pi(M) = \pi(\Lambda(\tilde{M}))$  est la classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_6$  formée des produits de trois transpositions à supports disjoints. Par conséquent,  $\tau(\pi(M))$  est la classe de conjugaison de  $\mathfrak{S}_6$  formée des transpositions (c'est-à-dire des réflexions).

Si  $1 \leq j \leq 5$ , on pose  $s_j = (j, j+1)$  et  $w_j = (1, j)(2, j+1)$ , ce qui implique que  $s_j = w_j s_1 w_j^{-1}$ . Posons maintenant  $\mu_j = \tau^{-1}(w_j) \mu_0 \tau^{-1}(w_j)^{-1}$ . Alors  $\pi(\mu_j) = \tau^{-1}(s_j)$  et donc  $\mathfrak{S}_6 = \langle \pi(\mu_1), \pi(\mu_2), \pi(\mu_3), \pi(\mu_4), \pi(\mu_5) \rangle$ . Par conséquent, d'après la proposition 2.5, on a  $G_{31} = \langle \tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \tilde{\mu}_3, \tilde{\mu}_4, \tilde{\mu}_5 \rangle$ . Cela montre la première assertion.

Montrons la deuxième. Soit  $\tilde{S}$  un ensemble de réflexions qui engendrent  $G_{31}$ . Alors  $\pi(\Lambda(\tilde{S}))$  engendre  $\mathfrak{S}_6$  et donc  $\tau(\pi(\Lambda(\tilde{S})))$  engendre  $\mathfrak{S}_6$ . Or il est bien connu que  $\mathfrak{S}_6$  ne peut pas être engendré par 4 transpositions (en effet, un sous-groupe de  $\mathfrak{S}_6$  engendré par 4 transpositions ne peut pas être transitif sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ). Donc  $|\tilde{S}| \geq 5$ . ■

## RÉFÉRENCES

- [BMR] M. BROUÉ, G. MALLE & R. ROUQUIER, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J. reine angew. Math. **500** (1998), 127-190.
- [ST] G.C. SHEPHARD & J.A. TODD, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274-304.

C. BONNAFÉ  
 CNRS - UMR 6623,  
 Laboratoire de Mathématiques de Besançon,  
 16 Route de Gray,  
 25030 BESANÇON Cedex,  
 FRANCE,  
 bonnafe@math.univ-fcomte.fr